

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОБМЕЖЕНИХ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО ЗНАХОДЯТЬСЯ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ

На основі застосування апарату аналітичних функцій розроблено узагальнену методику розв'язання напружено-деформованого стану пластинчастих елементів конструкцій, що знаходяться під дією зосереджених сил.

Doc. O. Dumanski – USUFWT

Generalized solution of strained state of limited lamellar construction elements, that are found under action of concentrated power factors

On vehicle application base of analytic functions developed a generalized solution of tensely-deformed state of lamellar constructions elements, that are found under action of concentrated forces.

Наведемо фундаментальну (узагальнену) методику розв'язання основних плоских задач теорії пружності для пластин щодо областей, які відображаються на круг поліномами довільного ступеня. Розв'язок знайдено з використанням методу Мусхелішвілі [1] і записано у простому вигляді.

1. Загальний розв'язок задачі

Для побудови розв'язку типу Гріна необхідно розглянути задачу теорії пружності для заданої області за умови, що у деяких внутрішніх точках комплексні потенціали мають певні особливості та границя області вільна від навантаження.

Задача теорії пружності для області D, яка обмежена контуром L зводиться до визначення функцій Мусхелішвілі $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$ з умови [1]

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1(z), \quad z \in L,$$

де: $f_1(z)$ – неперервна і однозначна на контурі L функція, яка визначається через задані на границі зусилля (в даному випадку її можна вважати рівною нулю, однак для загальності її далі утримуватимемо); $z=x+iy$; Оху – декартова система координат.

Для побудови розв'язку типу Гріна необхідно знайти функції $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$, що мають такі особливості:

$$\varphi_1^0 = -\sum_{j=1}^n P_j \ln(z - z_j), \quad \psi_1^0 = \sum_{j=1}^n [\alpha \bar{P}_j \ln(z - z_j) + \bar{z}_0 P_j \frac{1}{z - z_0}], \quad (1)$$

де: α – довільна дійсна стала; P_j – комплексні сталі, що задовольняють умову

$$\sum_{j=1}^n P_j = 0. \quad (2)$$

Зазначимо, що при $\alpha=\chi$ умова (2) є умовою рівноваги прикладених до області D сил. У цьому випадку будемо вважати також, щоби і головний момент прикладених сил був нульовим.

Будемо розглядати випадок, коли область D, яку займає тіло, є обмежена, однозв'язна і відображається на одиничний круг у площині z функцією $z = \omega(\zeta)$, де $\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n, c_1, \dots, c_n$ – задані сталі.

Умова на межі області тоді запишеться [1]

$$\varphi(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} = f(\sigma) \quad \text{при } |\sigma|=1, \quad (3)$$

$$\text{де: } \varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta)); \quad \Omega(\zeta) = \psi(\zeta) + \overline{\omega(1/\zeta)} \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta); \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta)); \quad \varphi'(\zeta) = d\varphi/d\zeta; \quad f(\sigma) = f_1(\omega(\sigma)). \quad (4)$$

У результаті відображення точкам z_j у площині z будуть відповідати такі точки ζ_j у площині, що $z_j = \omega(\zeta_j)$. На основі (1) та (4) встановлюємо, що введені функції будуть мати такі особливості:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = \Omega_0(\zeta) + \overline{Q(1/\zeta)},$$

$$\varphi = -\sum_{j=1}^n P_j \ln(\zeta - \zeta_j); \quad \Omega_0 = \sum_{j=1}^n \left[\alpha \bar{P}_j \ln(\zeta - \zeta_j) + \gamma_j P_j \frac{1}{\zeta - \zeta_j} \right];$$

де

$$\gamma_j = \frac{\overline{\omega(\zeta_j)} - \overline{\omega(1/\zeta_j)}}{\omega'(\zeta_j)}; \quad Q(\zeta) = Q_1\zeta + Q_2\zeta^2 + \dots + Q_n\zeta^n;$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – невідомі сталі. Тут функції $\varphi_0(\zeta)$ та $\Omega_0(\zeta)$ враховують особливості функцій $\varphi_1(z)$ і $\Omega_1(z)$ у точках z_j ; поліном $Q(1/\zeta)$ виникнув за рахунок полюса N-го порядку у точці $\zeta=0$ функції $\overline{\omega(1/\zeta)}$ (невідомі коефіцієнти полінома будуть визначені нижче).

Функції $\varphi(\zeta)$, $\Omega(\zeta)$ зобразимо у вигляді:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_*, \quad \Omega = \Omega_0 + \overline{Q(1/\zeta)} + \Omega_*, \quad (5)$$

де φ_*, Ω_* – аналітичні при $|\zeta| \leq 1$ функції. Після множення (3) та спряженої до неї рівності на $\frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ та інтегрування вздовж кола $|\sigma| = 1$ з урахуванням (5), отримусмо:

$$\varphi(\zeta) = U(\zeta) - Q(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = V(\zeta) + \overline{Q(1/\zeta)}, \quad (6)$$

де:

$$U(\zeta) = \varphi_0(\zeta) - \overline{\Omega_0(1/\zeta)} + F_1(\zeta), \quad V(\zeta) = \Omega_0(\zeta) - \overline{\varphi_0(1/\zeta)} + F_2(\zeta),$$

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad F_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \zeta}; \quad \gamma - \text{коло } |\sigma|=1 \quad (7)$$

Довільні сталі, що виникають при інтегруванні і які не впливають на напружений стан, в (6) та (7) зафіксовані. Після перетворень із (7) знаходимо:

$$U(\zeta) = U_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_j \bar{P}_j \frac{\zeta_j^2}{\zeta - \zeta_j}; \quad V(\zeta) = V_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \gamma_j P_j \frac{1}{\zeta - \zeta_j}, \quad (8)$$

де

$$U_0(\zeta) = -\sum_{j=1}^n P_j [\ln(\zeta - \zeta_j) + \alpha \ln(\zeta - \zeta_{j*})]; \quad V_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j [\ln(\zeta - \zeta_{j*}) + \alpha \ln(\zeta - \zeta_j)]; \quad \zeta_{j*} = 1/\bar{\zeta}_j.$$

$$I_1(\zeta) = w(\zeta)S'(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{\bar{b}_n}{\sigma^n} + \frac{\bar{b}_{n-1}}{\sigma^{n-1}} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\sigma} \right) S'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

оскільки $w(\zeta)$ є аналітичною у крузі функцією. Для підінтегральної функції справедлива формула:

$$\left(\frac{\bar{b}_n}{\sigma^n} + \frac{\bar{b}_{n-1}}{\sigma^{n-1}} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\sigma} \right) S'(\sigma) = S'(\sigma) + \left(\frac{g_n}{\sigma^n} + \frac{g_{n-1}}{\sigma^{n-1}} + \dots + \frac{g_1}{\sigma} \right),$$

де: $g_1, g_2, \dots, g_n$ – деякі сталі;

$$S'(\sigma) = \bar{b}_1 S'_{n-1} \sigma^{n-2} + (\bar{b}_1 S'_{n-2} + \bar{b}_2 S'_{n-1}) \sigma^{n-3} + \dots + (\bar{b}_1 S'_1 + \dots + \bar{b}_{n-1} S'_{n-1}).$$

Використовуючи теорему Коші до інтегралу, остаточно знаходимо:

$$I_1(\zeta) = w(\zeta)S'(\zeta) + S'_*(\zeta).$$

Розглянемо тепер інтеграл

$$I_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)} U'_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}.$$

Підставивши вираз для функції U_0 , отримуємо:

$$I_2(\zeta) = P_j [Y(\zeta, \zeta_j) + \alpha Y(\zeta, \zeta_j)]$$

де

$$Y(\zeta, c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)(\sigma - c)}.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{(\sigma - \zeta)(\sigma - c)} = \left(\frac{1}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\sigma - c} \right) \frac{1}{\zeta - c}$, отримаємо:

$$Y(\zeta, c) = \frac{1}{\zeta - c} [A(\zeta) - A(c)],$$

де

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}.$$

Зобразимо

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)} - \left(\frac{\bar{b}_n}{\sigma^n} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\sigma} \right) \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{\bar{b}_n}{\sigma^n} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \dots$$

Враховуючи, що вираз у дужках першого інтегралу є аналітичною функцією у крузі, а у другому інтегралі – поза кругом, на основі теореми Коші знаходимо:

$$A(\zeta) = w(\zeta) \text{ при } |\zeta| < 1; \quad A(\zeta) = -\left(\frac{\bar{b}_n}{\zeta^n} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\zeta} \right) \text{ при } |\zeta| > 1$$

Використовуючи обчислені інтеграли, остаточно знаходимо:

$$\begin{aligned} \psi_n(\zeta) &= S'_*(\zeta) + w(\zeta) \left[\frac{P_j}{\zeta - \zeta_j} + \alpha \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j} + S'(\zeta) \right] + P_j \frac{1}{(\zeta - \zeta_j)} \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta_j)}{\omega'(\zeta_j)} - w(\zeta_j) \right] - \\ &- \alpha P_j \frac{w(\zeta_j)}{\zeta - \zeta_j} = \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j} \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta_j)}{\omega'(\zeta_j)} - w(\zeta_j) - \alpha w(\zeta_j) \right]. \end{aligned}$$

Випишемо похідні від знайдених функцій, які необхідні для знаходження напружень і перемішень:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \frac{d\Phi(\zeta)}{dz} = \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{(\omega'(\zeta))^2};$$

$$\varphi'(\zeta) = U'_0(\zeta) + \bar{\Gamma}_j \bar{P}_j \zeta_j \frac{n\zeta - (n+1)\zeta_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} \zeta^n - S'(\zeta),$$

$$\varphi''(\zeta) = U''_0(\zeta) + \bar{\Gamma}_j \bar{P}_j \zeta_j \frac{n(n-1)\zeta^2 - 2(n-1)\zeta\zeta_j + n(n+1)\zeta_j^2}{(\zeta - \zeta_j)^2} \zeta^{n-1} - S''(\zeta),$$

$$\psi'_n(\zeta) = V'_0(\zeta) - \frac{\bar{P}_j \bar{\Gamma}_j \zeta_j}{\omega'(\zeta)(\zeta - \zeta_j)^2} \left(\frac{\omega'_1(\zeta)\omega'(\zeta) - \omega_1(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} [n\zeta - (n+1)\zeta_j] + \omega_1(\zeta) \frac{(n+2)\zeta_j - n\zeta}{\zeta - \zeta_j} \right);$$

$$\begin{aligned} \psi'_n(\zeta) &= w'(\zeta)[S'(\zeta) - U'_0(\zeta)] + w(\zeta)[S''(\zeta) - U''_0(\zeta)] + \\ &+ S'(\zeta) \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta_j)}{\omega'(\zeta_j)} - w(\zeta_j) \right] \frac{P_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} + \alpha P_j \frac{w(\zeta_j)}{(\zeta - \zeta_j)^2}, \end{aligned}$$

де

$$\omega_1(\zeta) = \zeta^n \bar{\omega}(1/\zeta) = \bar{c}_1 \zeta^{n-1} + \bar{c}_2 \zeta^{n-2} + \dots + \bar{c}_n.$$

Таким чином, побудовано всі необхідні співвідношення та значення, за якими, підставивши їх у формули напружень і перемішень, одержуємо повний розв'язок задачі.

Література

1. Мусхелишвили П.П. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

УДК 650.053

Ст. викл. Л.Д. Загвойська – УкрДЛТУ

ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ТА АНАЛІЗУ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ І ФУНКЦІЙ ВИТРАТ

Розглянуто сучасні економетричні підходи до побудови виробничих функцій з метою подальшого аналізу поведінки виробника. Зокрема, наведено методологічні підходи до вивчення питання заміщення факторів виробництва у контексті неокласичної теорії та теорії двоїстості.

L. Zahvoyska – USUFWT

Some theoretical aspects of production and cost functions estimating and analyzing

Modern approaches to applying economic theory and econometrics to study the forest industry technology and employment of production factors are presented in this paper. Neoclassic and duality theory background is reviewed.

Вступ

Упродовж кількох останніх десятиліть економічна думка торує шлях до аналізу поведінки виробника на ринку факторів виробництва. Прагнення до максимізації прибутку, а отже мінімізації витрат при збереженні оптимальних обсягів виробництва є основним правилом діяльності фірми. Способи поєднання праці, капіталу, сировини й матеріалів, електроенергії, які склалися на підприємстві та у галузі, описуються за допомогою виробничих функцій. Саме вони сьогодні з